Contrôle terminal de Mécanique des solides

Session 1 - Durée : 1h30

L'usage des téléphones portables et de tout document est strictement interdit

Les vecteurs sont notés en gras

A. Questions de Cours

1. Commenter et justifier en appliquant le théorème du centre de masse à une personne se déplaçant sur un sol horizontal, la phrase suivante : « c'est la force de frottement exercée par le sol qui permet de marcher ».
2. La dénomination « non glissement » est-elle équivalente à celle de « non frottement » ? On argumentera sa réponse à l'aide de théorème ou formulation précise de la dynamique des solides en contact.

B. Problème : Machine d'Atwood

Le système mécanique étudié (cf. *figure)* est une machine d'Atwood conçue par le physicien anglais G. Atwood en 1784. Les masses A et B assimilées à des points matériels sont respectivement m et M. La poulie a pour rayon R et pour moment d'inertie par rapport à son axe de révolution I_Δ (cf. *figure)*.

Sa liaison avec l'axe de rotation est parfaite. Le fil reliant les 2 masses est inextensible, et on notera L sa longueur ; en outre, il ne glisse pas dans la gorge de la poulie.

On désigne par z la coordonnée fixant la position de B selon la verticale descendante du référentiel galiléen *R(Oxyz)*, à partir du plan horizontal passant par O. **On note φ l'angle de rotation de la poulie.**

On note g l'accélération due à la pesanteur, avec $\mathbf{g} = g\,\mathbf{e}_z$.

1. Combien de degrés de liberté possède le système constitué par A, B et la poulie ?
2. Quelle est la nature du mouvement de la portion de fil située le long de IA, JB et IJ ?
3. Exprimer la vitesse du point matériel B en fonction des données du problème et justifier pourquoi les vitesses des points I_1 et J_1 appartenant au fil et coïncidant avec la poulie respectivement en I et J sont définies par : $\mathbf{v}_{I_1/R} = -\dot{z}\,\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{v}_{J_1/R} = \dot{z}\,\mathbf{e}_z$
4. Donner l'expression de la vitesse d'un point matériel quelconque appartenant à la poulie en fonction de R et de $\dot{\varphi}$.
5. En déduire l'expression de la vitesse des points I et J appartenant à la poulie.

6. En appliquant la condition de roulement en I, déterminer la relation simple entre z, R et $\dot{\varphi}$. Retrouver ce même résultat au point J. En déduire l'égalité suivante : $z = R\varphi + \text{Cte}$.
7. Déterminer l'expression de z_A qui permet de repérer la côte de A, en fonction de L et de z.
8. Donner l'expression de l'énergie cinétique du système constitué par la masselotte A, la masselotte B et la poulie, en fonction de I_Δ, R et $\dot{z}$,
9. Déterminer l'énergie potentielle de ce même système (à une constante près que l'on ne cherchera pas à déterminer). *On rappelle que l'axe (Oz) est la verticale descendante*.
10. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique que l'on justifiera soigneusement, déterminer l'équation différentielle du mouvement.
11. En déduire la nature du mouvement et quel peut être l'intérêt de ce type de machine.
12. Application numérique : m = 100g, M = 300g, I_Δ = 8. 10^{-6} kg.m^2, R = 2cm, donner une valeur approchée de l'accélération $\ddot{z}$.
13. Appliquer le théorème du centre de masse à A.
14. Appliquer le théorème du centre de masse à B.
15. Appliquer le théorème du moment cinétique pour la poulie seule en O.
16. En combinant les 3 équations précédentes, retrouver l'équation différentielle du mouvement obtenue en 10.

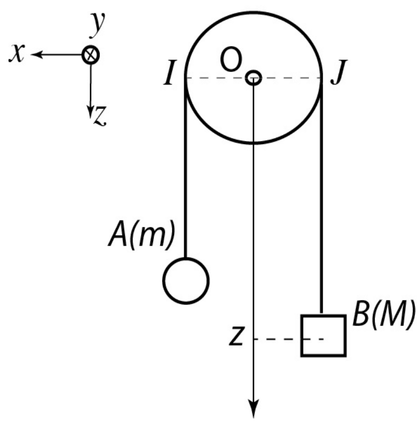

Figure : Schéma de la machine d'Atwood